2018 年初中数学联赛（初二年级）试题参考答案及评分标准

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.第一试，选择题和填空题只设 7 分和 0 分两档；第二试各题，请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

第一试

一、选择题：（本题满分 42 分，每小题 7 分）

1． 已知 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，则 $a^6-8a^2=$ （　　）

A. -3.　　B. $-\sqrt{5}$.　　C. $\sqrt{5}$.　　D. 3.

【答】A.

因为 $a^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=a+1$，所以 $a^3=a(a+1)=a^2+a=2a+1$，所以

$$a^6-8a^2=(2a+1)^2-8(a+1)=4a^2-4a-7=4(a+1)-4a-7=-3.$$

2． 满足 $(x^2+x-1)^{x+2}=1$ 的整数 x 的个数为 （　　）

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

【答】C.

当 $x+2=0$ 且 $x^2+x-1\neq 0$ 时，$x=-2$.

当 $x^2+x-1=1$ 时，$x=-2$ 或 $x=1$.

当 $x^2+x-1=-1$ 且 $x+2$ 为偶数时，$x=0$.

所以，满足条件的整数 x 有 3 个.

3． 设 $1\le n\le 100$，且 $8n+1$ 为完全平方数，则符合条件的整数 n 的个数为 （　　）

A. 12.　　B. 13.　　C. 14.　　D. 15.

【答】B.

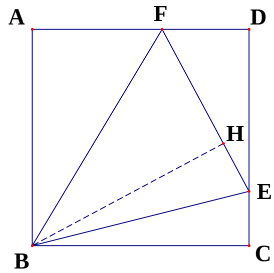
易知 $8n+1$ 只能为奇数的平方，设 $8n+1=(2l+1)^2$，其中 l 为非负整数，则 $n=\dfrac{l(l+1)}{2}$，所以 $1\le\dfrac{l(l+1)}{2}\le 100$，故 $1\le l\le 13$.所以，满足条件的整数 n 有 13 个.

4． 已知点 E，F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 CD，AD 上，$CD=4CE=4$，$\angle EFB=\angle FBC$，则 $EF=$ （　　）

A. $2\sqrt{3}$.　　B. $\sqrt{10}$.　　C. $\dfrac{13}{4}$.　　D. $\dfrac{17}{5}$.

【答】D.

由题意可得$CE=1,DE=3$. 设$DF=x$，则$AF=4-x$，$EF=\sqrt{x^2+9}$.



作 $BH\perp EF$ 于点 H . 因为 $\angle EFB=\angle FBC=\angle AFB$ ， $\angle BAF=90°=\angle BHF$ ， BF 公共，所以$\triangle BAF\cong\triangle BHF$，所以$BH=BA=4$.

由$S_{四边形ABCD}=S_{\Delta ABF}+S_{\Delta BEF}+S_{\Delta DEF}+S_{\Delta BCE}$得

$$4^2=\frac{1}{2}\cdot4\cdot(4-x)+\frac{1}{2}\cdot4\cdot\sqrt{x^2+9}+\frac{1}{2}\cdot3\cdot x+\frac{1}{2}\cdot4\cdot1,$$

解得$x=\frac{8}{5}$. 所以$EF=\sqrt{x^2+9}=\frac{17}{5}$.

5．已知非零实数x,y,z满足$\frac{x^2}{1+4x^2}=\frac{y}{4},\frac{y^2}{1+10y^2}=\frac{z}{10},\frac{z^2}{1+16z^2}=\frac{x}{2}$，则$x+y+z=$ （　　）

A. $\frac{13}{12}$.　　　B. $\frac{19}{12}$.　　　C. $\frac{17}{10}$.　　　D. $\frac{19}{10}$.

【答】C.

由条件得$\frac{1}{x^2}+4=\frac{4}{y},\frac{1}{y^2}+10=\frac{10}{z},\frac{1}{z^2}+16=\frac{2}{x}$，三式相加，得

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+30=\frac{2}{x}+\frac{4}{y}+\frac{10}{z}，即 \ (\frac{1}{x}-1)^2+(\frac{1}{y}-2)^2+(\frac{1}{z}-5)^2=0，$$

所以 $x=1,y=\frac{1}{2},z=\frac{1}{5}$，故$x+y+z=\frac{17}{10}$.

6．设$M=\frac{1}{2018}+\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}+\cdots+\frac{1}{2050}$，则$\frac{1}{M}$的整数部分是 （　　）

A. 60.　　　B. 61.　　　C. 62.　　　D. 63.

【答】B.

因为$M<\frac{1}{2018}\times33$，所以$\frac{1}{M}>\frac{2018}{33}=61\frac{5}{33}$.

又$M=(\frac{1}{2018}+\frac{1}{2019}+\cdots+\frac{1}{2030})+(\frac{1}{2031}+\frac{1}{2032}+\cdots+\frac{1}{2050})$

$>\frac{1}{2030}\times13+\frac{1}{2050}\times20=\frac{1345}{83230}$，

所以$\frac{1}{M}<\frac{83230}{1345}=61\frac{1185}{1345}$，故$\frac{1}{M}$的整数部分为61.

二、填空题：（本题满分 28 分，每小题 7 分）

1．若素数p,q满足$7pq^2+p=q^3+43p^3+1$，则$p+q=$______.

【答】9.

显然p,q不能均为奇数（否则等式左边为偶数，右边为奇数），于是$p=2$或$q=2$.

（1）若$p=2$，则可得$q^3-14q^2+343=0$，解得$q=7$.检验知$(p,q)=(2,7)$为一组解.

（2）若 $q=2$，则可得 $29p=43p^3+9$，此式一边为奇数一边为偶数，没有整数解.

综上可知 $p=2,q=7$，所以 $p+q=9$.

2. 已知实数 a,b,c 满足 $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}$，则 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=$________.

【答】 -1 或 8.

设 $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=k$，则 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=k^3$.

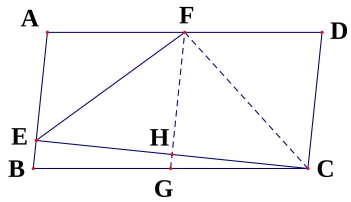
当 $a+b+c=0$ 时，$k=-1$.

当 $a+b+c\neq 0$ 时，$k=\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{c+a+b}=2$.

所以 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=-1$ 或 8.

3. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$BC=2AB$，$CE\perp AB$ 于 E，F 为 AD 的中点，若 $\angle AEF=48^\circ$，则 $\angle B=$_______.

【答】 84°.



设 BC 的中点为 G，连结 FG 交 CE 于 H，由题设条件知 $FGCD$ 为菱形.

由 $AB // FG // DC$ 及 F 为 AD 的中点，知 H 为 CE 的中点.

又 $CE\perp AB$，所以 $CE\perp FG$，所以 FH 垂直平分 CE，故

$\angle DFC=\angle GFC=\angle EFG=\angle AEF=48^\circ$.

所以 $\angle B=\angle FGC=180^\circ-2\times 48^\circ=84^\circ$.

4. 已知两个正整数的和比它们的积小 1000，若其中较大的数是完全平方数，则较小的数为_______.

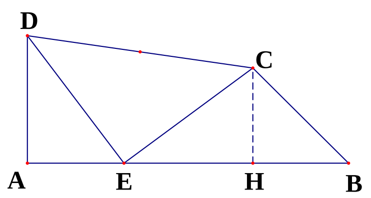
【答】 8.

设这两个数为 $m^2,n\ (m^2>n)$，则 $m^2+n=m^2n-1000$，即 $(m^2-1)(n-1)=1001$.

又 $1001=1001\times1=143\times7=91\times11=77\times13$，所以 $(m^2-1,n-1)=(1001,1)$ 或 $(143,7)$ 或 $(91,11)$ 或 $(77,13)$，验证可知只有 $(m^2-1,n-1)=(143,7)$ 满足条件，此时 $m^2=144,n=8$.

第二试

一、（本题满分 20 分） 已知 E 为四边形 $ABCD$ 的边 AB 上的一点，$\angle A=90^\circ$，$\angle B=45^\circ$，$AB=4$，$CD=2\sqrt{2}$，$DE=CE=2$，求 AD.



解 因为 $DE=2$，$\angle DAE=90^\circ$，所以

$AE^2+AD^2=DE^2=4$.　　①　　**……………………5 分**

由 $DE=CE=2$，$CD=2\sqrt{2}$ 可得 $\angle DEC=90^\circ$，所以

$\angle CEB=90^\circ-\angle DEA=\angle ADE$.

作 $CH\perp AB$ 于点 H，则 $\triangle ADE\cong\triangle HEC$，所以 $EH=AD$，$CH=AE$. **……………10 分**

在 Rt△CHB 中，$\angle B=45°$，则 $HB=CH=AE$，故
$AB=AE+EH+HB=2AE+AD=4$.　　②　　……………………15 分

联立①，②，解得 $AE=\dfrac{6}{5}$，$AD=\dfrac{8}{5}$.　　……………………20 分

二、（**本题满分 25 分**）若实数 x,y,z 满足 $x+y+z=6$，$xyz+1=2(xy+yz+zx)$，$(x-3)^3+(y-3)^3+(z-3)^3=3$，求 xyz.

解　令 $a=x-3$，$b=y-3$，$c=z-3$，$xyz=m$，则 $a+b+c=-3$，$a^3+b^3+c^3=3$，

$ab+bc+ca=(xy+yz+zx)-6(x+y+z)+27=\dfrac{1}{2}(m+1)-9$，

$abc=(x-3)(y-3)(z-3)=xyz-3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)-27=\dfrac{1}{2}(51-m)$，………10 分

又因为 $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=(a+b+c)[(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)-3(ab+bc+ca)]+3abc$

$=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc$，

所以 $(-3)^3-3\cdot(-3)[\dfrac{1}{2}(m+1)-9]+3\cdot\dfrac{1}{2}(51-m)=3$，　　……………………20 分

解得 $m=10$，即 $xyz=10$.　　……………………25 分

三、（**本题满分 25 分**）设 a,b,c 都是大于 1 的正整数，且 $(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ 能被 abc 整除，求所有满足条件的数组 (a,b,c).

解　因为 $(ab-1)(bc-1)(ca-1)=(abc)^2-abc(a+b+c)+ab+bc+ca-1$，且 abc 整除 $(ab-1)(bc-1)(ca-1)$，所以，存在正整数 k 使得 $ab+bc+ca-1=kabc$，则 $k=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}$.

……………………5 分

当 $a\le b\le c$ 时，$k<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<\dfrac{3}{a}\le\dfrac{3}{2}$，所以 $k=1$.　　……………………10 分

此时 $abc=ab+bc+ca-1<3bc$，所以 $a<3$，故 $a=2$. 于是 $2bc=bc+2b+2c-1$，故 $(b-2)(c-2)=3$，所以 $b-2=1,c-2=3$，即 $b=3,c=5$. 故 $(a,b,c)=(2,3,5)$.

……………………20 分

再由 a,b,c 的对称性知，所有可能的数组 (a,b,c) 共有 6 组，即 $(2,3,5)$，$(2,5,3)$，$(3,2,5)$，$(3,5,2)$，$(5,2,3)$，$(5,3,2)$.　　……………………25 分